

Clase 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

Cambio, modelos y primeras definiciones

Idea central

Una ecuación diferencial relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas. Por ello, proporciona un lenguaje natural para describir cantidades que cambian con el tiempo o con otra variable.

1. Introducción

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparece una función desconocida y alguna de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{dx}{dt} = x$$

relaciona la función desconocida $x = x(t)$ con su tasa de cambio. La función $x(t) = e^t$ es una solución porque

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t.$$

Más generalmente, toda función de la forma

$$x(t) = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R},$$

satisface la ecuación. Este ejemplo muestra que una ecuación diferencial puede tener una familia completa de soluciones.

Definición 1.1 (Ecuación diferencial). Una *ecuación diferencial* es una ecuación que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas.

Definición 1.2 (EDO y EDP). Una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) contiene derivadas respecto de una sola variable independiente. Una *ecuación diferencial parcial* (EDP) contiene derivadas parciales respecto de dos o más variables independientes.

Por ejemplo,

$$\frac{dx}{dt} = x$$

es una EDO porque x depende únicamente de t , mientras que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es una EDP porque $u = u(x, t)$ depende de la posición y del tiempo.

1.1. Modelos matemáticos y sistemas dinámicos

Las ecuaciones diferenciales son una de las principales herramientas para representar fenómenos físicos, biológicos, económicos y de ingeniería. En particular, permiten formular modelos de sistemas cuyo estado cambia.

Definición 1.3 (Estado de un sistema). El *estado* de un sistema es el conjunto de variables necesarias para describirlo en un instante determinado.

Definición 1.4 (Sistema dinámico). Un *sistema dinámico* es un sistema cuyo estado evoluciona de acuerdo con una regla determinada. Cuando la variable independiente es el tiempo, esta regla describe cómo cambia el estado a medida que transcurre el tiempo.

Un péndulo, un circuito eléctrico, una población o un conjunto de especies que interactúan son ejemplos de sistemas dinámicos. Cuando sus reglas de evolución se expresan mediante ecuaciones diferenciales, estudiar las soluciones ayuda a comprender su comportamiento y, bajo ciertos supuestos, anticipar su evolución.

Observación. Un modelo matemático no es una copia exacta de la realidad. Es una representación construida a partir de supuestos y diseñada para responder una pregunta concreta.

1.1.1. Un primer modelo: crecimiento de Malthus

Consideremos una población aislada y sea

$$x = x(t)$$

su tamaño en el tiempo t . El valor $x(t)$ es el estado del sistema. Puede representar el número de individuos o, en algunos contextos, la biomasa total.

Tasas de crecimiento

Si una población pasa de 100 a 110 individuos durante un año, su cambio es de 10 individuos y su tasa promedio de crecimiento es

$$\frac{110 - 100}{1 \text{ año}} = 10 \text{ individuos/año.}$$

En relación con la población inicial, este aumento corresponde a

$$\frac{10}{100} = 0.1,$$

es decir, a un crecimiento relativo del 10 % durante ese año.

Definición 1.5 (Tasa promedio de cambio). Si una cantidad $x = x(t)$ cambia entre los tiempos t_1 y t_2 , su tasa promedio de cambio es

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Por ejemplo, si una población pasa de 100 a 110 individuos entre los años $t = 0$ y $t = 1$, entonces su tasa promedio de cambio es

$$\frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{110 - 100}{1} = 10 \text{ individuos/año.}$$

Definición 1.6 (Tasa instantánea de cambio). La tasa instantánea de cambio de $x = x(t)$ en el tiempo t es su derivada

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t).$$

En un modelo poblacional, sus unidades pueden ser individuos por año.

Por ejemplo, si

$$x'(5) = 20 \text{ individuos/año,}$$

significa que, en el tiempo $t = 5$, la población está aumentando instantáneamente a una tasa de 20 individuos por año.

Definición 1.7 (Tasa relativa de crecimiento). Si $x(t) > 0$, la tasa relativa o per cápita de crecimiento es

$$\frac{x'(t)}{x(t)}.$$

Mide el cambio por unidad de tiempo y por individuo presente. Sus unidades son el inverso de una unidad de tiempo, por ejemplo, año⁻¹.

Por ejemplo, si en cierto instante

$$x(t) = 1000 \quad \text{y} \quad x'(t) = 50 \text{ individuos/año},$$

entonces la tasa relativa de crecimiento es

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{50}{1000} = 0.05 \text{ año}^{-1}.$$

Esto corresponde a una tasa relativa instantánea del 5 % anual.

En una población aislada, el cambio del tamaño se debe principalmente a nacimientos y muertes. El modelo de Malthus supone que la tasa relativa de crecimiento permanece constante. Si esa constante es r , entonces

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r,$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{x'(t) = rx(t)}. \quad (1)$$

Modelo matemático

La ecuación (1) afirma que la rapidez con la que cambia la población es proporcional a su tamaño. La constante r se denomina tasa de crecimiento intrínseco: si $r > 0$, la población crece; si $r < 0$, disminuye; y si $r = 0$, permanece constante.

Por ejemplo, si $r = 0.1 \text{ año}^{-1}$, una población de 100 individuos tiene una tasa instantánea de cambio de 10 individuos por año, mientras que una población de 1000 individuos tiene una tasa de 100 individuos por año. Ambas tienen la misma tasa relativa, pero diferentes tasas absolutas.

La familia

$$x(t) = Ce^{rt}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

satisface la ecuación (1). En efecto,

$$x'(t) = rCe^{rt} = rx(t).$$

Por ahora no deduciremos esta solución; únicamente verificamos que satisface la ecuación diferencial. Si se conoce el tamaño inicial $x(t_0) = x_0$, entonces la solución correspondiente es

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}.$$

Observación (Alcances del modelo). El modelo supone que r es constante y que no hay limitaciones de alimento, espacio ni otros recursos. Por ello puede describir tendencias durante ciertos periodos, pero no el crecimiento indefinido de una población real. Su valor consiste en mostrar con claridad qué consecuencias se desprenden de sus supuestos.

Actividad

Para la ecuación $x' = rx$, identifica la variable independiente, la variable dependiente y el parámetro. Después explica, sin resolver la ecuación, qué significa el signo de r .

2. Definiciones y terminología

El modelo de Malthus es una ecuación diferencial ordinaria porque la función desconocida $x = x(t)$ depende de una sola variable independiente.

2.1. Orden de una ecuación diferencial

Definición 2.1 (EDO de orden m). Una ecuación diferencial ordinaria de orden m para una función desconocida $x = x(t)$ es una relación de la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0,$$

en la que $x^{(m)}$ es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

2.2. Clasificación por linealidad

Definición 2.2 (EDO lineal). Una ecuación diferencial ordinaria de orden m se dice que es *lineal* si puede escribirse en la forma

$$a_m(t)x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t),$$

donde los coeficientes

$$a_0(t), a_1(t), \dots, a_m(t)$$

y el término $g(t)$ dependen únicamente de la variable independiente t . Además, se requiere que $a_m(t) \neq 0$ en el intervalo considerado.

Una EDO que no puede escribirse de esta manera se denomina *no lineal*.

En una EDO lineal se cumplen las siguientes condiciones:

- La función desconocida x y sus derivadas

$$x', x'', \dots, x^{(m)}$$

aparecen únicamente a la primera potencia.

- No aparecen productos entre la función y sus derivadas, ni entre diferentes derivadas; por ejemplo, no pueden aparecer términos como

$$xx', \quad x'x'', \quad x^2.$$

- Los coeficientes pueden depender de la variable independiente t , pero no de la función desconocida x .
- No pueden aparecer funciones no lineales de x o de sus derivadas, como

$$\sin(x), \quad e^x, \quad \sqrt{x}, \quad \text{o} \quad (x')^2.$$

Observación. Que los coeficientes dependan de t no hace que la ecuación sea no lineal. Por ejemplo,

$$t^2x'' + \sin(t)x' - e^tx = t$$

es una EDO lineal de segundo orden.

Definición 2.3 (EDO lineal homogénea y no homogénea). Una EDO lineal

$$a_m(t)x^{(m)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t)$$

se denomina *homogénea* si $g(t) = 0$. Si $g(t) \neq 0$, se denomina *no homogénea*.

Ejemplo 2.4 (Ecuaciones lineales). Las ecuaciones

$$x' + 3x = t, \quad x'' - 2tx' + x = 0, \quad t^2x''' - tx' + 5x = e^t$$

son lineales de primer, segundo y tercer orden, respectivamente.

Ejemplo 2.5 (Ecuaciones no lineales). Las ecuaciones

$$x' = x^2, \quad x'' + xx' = 0, \quad x'' + \sin(x) = 0$$

son no lineales. En ellas aparecen, respectivamente, x^2 , el producto xx' y la función no lineal $\sin(x)$.

Ejemplo 2.6 (Modelo de Malthus). La ecuación de Malthus

$$x' = rx$$

es una EDO lineal de primer orden. Como puede escribirse como

$$x' - rx = 0,$$

es además homogénea.

Actividad

Clasifica las siguientes ecuaciones según su orden y linealidad:

- a) $x' + t^2x = \cos(t)$, b) $x'' + x^3 = 0$,
 c) $tx''' + e^tx' - x = 0$, d) $x'' + (x')^2 = 1$.

3. Soluciones de una ecuación diferencial

Uno de los objetivos centrales del curso es estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Esto puede significar obtener una fórmula explícita, aproximar la solución numéricamente o analizar su comportamiento cualitativo.

Consideremos una EDO de orden m escrita en la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0.$$

Definición 3.1 (Solución de una EDO). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Una función

$$x = \phi(t)$$

es una *solución* de la ecuación diferencial

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0$$

en el intervalo I si ϕ posee al menos m derivadas continuas en I y satisface

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(m)}(t)) = 0$$

para todo $t \in I$.

En otras palabras, al sustituir la función ϕ y sus derivadas en la ecuación diferencial, se obtiene una identidad en todo el intervalo I .

Ejemplo 3.2 (Verificación de una solución). Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = rx,$$

donde r es una constante. La función

$$x(t) = Ce^{rt},$$

con $C \in \mathbb{R}$, es una solución en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$x'(t) = rCe^{rt} = rx(t).$$

Por tanto, al sustituir $x(t) = Ce^{rt}$ en la ecuación, se obtiene una identidad para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.1. Intervalo de definición

El intervalo forma parte de la solución. También se le llama *intervalo de existencia*, *intervalo de validez* o *dominio de la solución*. Puede ser abierto, cerrado, acotado o infinito, siempre que la función y las expresiones de la ecuación estén bien definidas en él.

Ejemplo 3.3 (Importancia del intervalo). La función

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

satisface

$$x' = -x^2,$$

porque

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t}\right)^2.$$

Sin embargo, no está definida en $t = 0$. Por tanto, es solución en

$$(-\infty, 0) \quad \text{o} \quad (0, \infty),$$

pero no en un intervalo que contenga al cero.

Observación. Aunque el dominio de $1/t$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, este conjunto no es un intervalo. Para hablar de una solución se considera cada intervalo máximo por separado: $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$.

3.2. Curvas solución

Definición 3.4 (Curva solución). La gráfica de una solución $x = \phi(t)$ sobre un intervalo I se denomina *curva solución* o *curva integral*.

Una misma fórmula puede producir diferentes curvas solución al restringirse a distintos intervalos. Por ejemplo, $x(t) = 1/t$ determina una curva solución en $(-\infty, 0)$ y otra en $(0, \infty)$.

3.3. Soluciones explícitas e implícitas

Definición 3.5 (Solución explícita). Una solución es *explícita* cuando la variable dependiente se encuentra despejada como una función de la variable independiente:

$$x = \phi(t).$$

Las funciones $x(t) = Ce^{rt}$ y $x(t) = 1/t$ son ejemplos de soluciones explícitas.

Definición 3.6 (Solución implícita). Una relación

$$G(t, x) = 0$$

define una *solución implícita* de una EDO en un intervalo I si en dicho intervalo determina al menos una función $x = \phi(t)$ que satisface tanto la relación como la ecuación diferencial.

Ejemplo 3.7 (Verificación de una solución implícita). La relación

$$t^2 + x^2 = 25$$

define implícitamente soluciones de

$$x' = -\frac{t}{x}.$$

En efecto, al derivar respecto de t obtenemos

$$2t + 2xx' = 0,$$

y, siempre que $x \neq 0$,

$$x' = -\frac{t}{x}.$$

Al despejar x aparecen las dos ramas

$$x(t) = \sqrt{25 - t^2} \quad \text{y} \quad x(t) = -\sqrt{25 - t^2},$$

definidas como soluciones en el intervalo $(-5, 5)$.

3.4. Familias de soluciones

Una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones. De manera análoga a la constante de integración del cálculo integral, sus soluciones suelen contener parámetros arbitrarios.

Definición 3.8 (Familia de soluciones). Una expresión que representa soluciones de una EDO y contiene uno o más parámetros arbitrarios se denomina *familia de soluciones*. Si contiene un parámetro se llama familia uniparamétrica; si contiene m , familia m -paramétrica.

Definición 3.9 (Solución particular). Una *solución particular* se obtiene al asignar valores específicos a los parámetros de una familia de soluciones.

Ejemplo 3.10 (Familia del modelo de Malthus). La expresión

$$x(t) = Ce^{rt}$$

es una familia uniparamétrica de soluciones de $x' = rx$. Si $C = 2$, obtenemos la solución particular

$$x(t) = 2e^{rt}.$$

La elección $C = 0$ produce la solución trivial $x(t) = 0$.

Observación. En cursos posteriores puede aparecer una *solución singular*: una solución que no se obtiene asignando valores a los parámetros de la familia general. No necesitaremos este concepto por ahora.

4. Problemas de valor inicial

Una ecuación diferencial suele tener una familia de soluciones. Para describir un fenómeno particular necesitamos información adicional que permita elegir la solución correspondiente. Esta información se expresa mediante *condiciones iniciales*.

Definición 4.1 (Problema de valor inicial). Sea una EDO de orden m escrita en forma normal:

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}).$$

Un *problema de valor inicial* (PVI) consiste en encontrar una solución $y = y(t)$, definida en un intervalo I que contenga a t_0 , tal que

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(m-1)}(t_0) &= y_{m-1}, \end{aligned}$$

donde $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ son valores especificados.

Todas las condiciones se imponen en el mismo punto t_0 . En una EDO de orden m aparecen, en general, m condiciones iniciales. Estas condiciones suelen permitir determinar los m parámetros de una familia de soluciones.

Para una ecuación de primer orden, un PVI tiene la forma

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Geométricamente, buscamos una curva solución que pase por el punto (t_0, y_0) . Para una ecuación de segundo orden,

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1,$$

la curva debe pasar por (t_0, y_0) y tener pendiente y_1 en ese punto.

Cuando la variable independiente representa el tiempo, $y(t_0)$ puede describir la posición inicial de un objeto y $y'(t_0)$ su velocidad inicial. De ahí proviene el nombre *condiciones iniciales*.

Ejemplo 4.2 (Un PVI de primer orden). La familia

$$y(t) = Ce^t$$

contiene todas las soluciones de $y' = y$. Para resolver

$$y' = y, \quad y(0) = 3,$$

imponemos la condición inicial:

$$3 = y(0) = Ce^0 = C.$$

Por tanto, la solución particular es

$$y(t) = 3e^t.$$

Si, en cambio, la condición es $y(1) = -2$, entonces

$$-2 = Ce, \quad C = -2e^{-1},$$

y la solución correspondiente es

$$y(t) = -2e^{t-1}.$$

4.1. La condición inicial y el intervalo de solución

El intervalo de una solución de un PVI debe contener al punto inicial. Por ello, la condición inicial no sólo selecciona una función de la familia, sino que también determina cuál de sus intervalos de definición es pertinente.

Ejemplo 4.3 (Intervalo máximo de una solución). Consideremos

$$y' + 2ty^2 = 0.$$

Puede verificarse que

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + C}$$

es una familia de soluciones. Al imponer $y(0) = -1$, obtenemos

$$-1 = \frac{1}{C}, \quad C = -1.$$

Por tanto,

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - 1}.$$

Conviene distinguir tres ideas:

- Como función, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Como solución de la EDO, puede considerarse en cualquiera de los intervalos máximos

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, \infty).$$

- Como solución del PVI con $y(0) = -1$, el intervalo debe contener a $t_0 = 0$. Por tanto, su intervalo máximo de solución es $(-1, 1)$.

4.2. Existencia y unicidad

Antes de intentar resolver un PVI conviene formular dos preguntas:

- **Existencia:** ¿hay al menos una curva solución que pase por (t_0, y_0) ?
- **Unicidad:** si existe, ¿es la única curva solución que pasa por ese punto?

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para responder afirmativamente ambas preguntas.

Teorema 4.4 (Existencia y unicidad local). *Sea*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y sea R un rectángulo abierto del plano ty que contiene a (t_0, y_0) . Si f y su derivada parcial $\partial f / \partial y$ son continuas en R , entonces existe un intervalo

$$I_0 = (t_0 - h, t_0 + h), \quad h > 0,$$

en el cual el PVI posee una única solución.

La conclusión es *local*: garantiza una solución única cerca de t_0 , pero no determina qué tan grande puede ser el intervalo I_0 . La continuidad de f asegura existencia local; la condición adicional sobre $\partial f/\partial y$ asegura unicidad local.

Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias: si alguna falla, el teorema deja de ofrecer una conclusión, pero eso no significa automáticamente que no exista una solución o que no sea única.

Ejemplo 4.5 (Aplicación del teorema). Para el PVI

$$y' = y, \quad y(0) = 3,$$

tenemos $f(t, y) = y$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Ambas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. El teorema garantiza una solución única alrededor de $t = 0$. En este caso conocemos además la solución explícita $y(t) = 3e^t$, que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.6 (Cuando puede fallar la unicidad). Consideremos

$$y' = t\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

La función $f(t, y) = t\sqrt{y}$ es continua para $y \geq 0$, pero

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{2\sqrt{y}}$$

no está definida cuando $y = 0$. Por tanto, el teorema no garantiza unicidad en $(0, 0)$. De hecho, las funciones

$$y_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad y_2(t) = \frac{t^4}{16}$$

satisfacen tanto la ecuación como la condición inicial. El PVI tiene, por lo menos, dos soluciones.

En cambio, alrededor de cualquier punto (t_0, y_0) con $y_0 > 0$, tanto f como $\partial f/\partial y$ son continuas; allí el teorema sí garantiza unicidad local.

Idea central

Resolver una EDO produce, con frecuencia, una familia de curvas. Una condición inicial selecciona la curva que representa el fenómeno particular. Los teoremas de existencia y unicidad indican cuándo esa selección está bien definida, incluso antes de calcular la solución.